ŒUVRES

DE LAGUERRE

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. CH. HERMITE, H. POINCARÉ et E. ROUCHÉ,

MEMBRES DE L'INSTITUT.

TOME I.

ALGÈBRE. — CALCUL INTÉGRAL.

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
BRONX, NEW YORK

SECOND EDITION

THE PRESENT, SECOND EDITION IS A REPRINT IN TWO VOLUMES, UNALTERED EXCEPT FOR THE CORRECTION OF ERRATA, OF A WORK FIRST PUBLISHED IN TWO VOLUMES AT PARIS IN 1898 AND 1905, RESPECTIVELY. IT IS PUBLISHED AT NEW YORK IN 1972 AND IS PRINTED ON ACID-FREE PAPER

INTERNATIONAL STANDARD BOOK NUMBER 0-8284-0263-9
LIBRARY OF CONGRESS CATALOG CARD NUMBER 70-125075

LIBRARY OF CONGRESS CLASSIFICATION NUMBER QA3
DEWEY DECIMAL CLASSIFICATION NUMBER 510'.924

PRINTED IN THE UNITED STATES OF AMERICA

PRÉFACE.

Dans cette Notice sur la vie et les travaux de Laguerre, j'aurai plus à parler de ses travaux que de sa vie. Son existence, utile et laborieuse, n'a été ni agitée ni bruyante. Sans ambition, partagé entre ses devoirs professionnels, les joies de l'étude et celles de la famille, les seuls événements de sa vie ont été des découvertes.

Laguerre naquit à Bar-le-Duc, le 9 avril 1834. Dès le début de ses études, son talent naissant fut remarqué de ses maîtres; mais il ne devait pas quitter les bancs du lycée sans avoir montré qu'il était autre chose qu'un bon écolier. En 1853, n'étant encore que candidat à l'École Polytechnique, il se signala par un travail original.

Dans le programme d'admission à cette École, la place d'honneur appartient à la Géométrie analytique. Cette Science se renouvelait alors par une révolution en quelque sorte inverse de la réforme cartésienne. Avant Descartes, le hasard seul, ou le génie, permettait de résoudre une question géométrique; après Descartes, on a pour arriver au

résultat des règles infaillibles; pour être géomètre, il suffit d'être patient. Mais une méthode purement mécanique, qui ne demande à l'esprit d'invention aucun effort, ne peut être réellement féconde. Une nouvelle réforme était donc nécessaire : Poncelet et Chasles en furent les initiateurs. Grâce à eux, ce n'est plus ni à un hasard heureux, ni à une longue patience que nous devons demander la solution d'un problème, mais à une connaissance approfondie des faits mathématiques et de leurs rapports intimes. Les longs calculs d'autrefois sont devenus inutiles, car on peut le plus souvent en prévoir le résultat.

Laguerre a joué dans cette réforme un rôle très important, que son premier travail de jeunesse permettait déjà de pressentir. La théorie des propriétés projectives de Poncelet, l'une des plus utiles des méthodes modernes, permet de déduire d'une proposition connue une infinité de propositions nouvelles. Mais, en 1853, cette théorie était loin d'être complète; bien des points, et non des moins importants, restaient encore à éclaircir : comment pouvait se faire la transformation des propriétés métriques des figures et, en particulier, des relations entre les angles? Le jeune lycéen résolut du premier coup ce problème qui préoccupait les fondateurs de la Géométrie moderne; sa solution, simple et élégante, fut publiée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Il entra le quatrième à l'École Polytechnique. Si son rang de sortie fut un peu moins brillant, nous ne devons pas nous en étonner, car il fut à l'École ce qu'il fut dans la vie. Le monde ne lui apparaissait pas comme un champ clos, ni les hommes comme des rivaux qu'il faut devancer à tout prix. Ce qu'il cherchait dans l'étude, ce n'était pas le succès, mais le savoir; malheureusement, le chemin le plus court vers ces premiers rangs si ardemment convoités n'est pas toujours le travail original et libre, qui fait perdre de vue le but auquel d'autres pensent sans cesse.

Devenu officier d'artillerie et envoyé à Metz, à Mutzig, puis à Strasbourg, il ne publia rien pendant dix ans. Il remplissait ses devoirs militaires avec une scrupuleuse ponctualité, et ses camarades pouvaient croire que sa profession l'absorbait tout entier. Ils se trompaient. Laguerre poursuivait silencieusement les études qu'il avait si brillamment commencées et accumulait d'importants matériaux.

Quand il revint à Paris, en 1864, pour remplir les fonctions de répétiteur à l'École Polytechnique, il lui eût été facile, en dévoilant les secrets qu'il devait à dix ans de travail, de publier un important volume de Géométrie qui l'eût immédiatement classé hors de pair. Il n'en fit rien. Les idées générales n'avaient de prix, à ses yeux, que par les applications particulières où elles pouvaient conduire. Il ne communiqua donc ses résultats qu'un à un, avec sobriété, presque avec avarice.

Difficile à satisfaire, il ne voulait rien livrer que de parfait. Ce n'est qu'en 1870 qu'il fit, à la salle Gerson, un Cours public, où il exposa ses vues d'ensemble sur l'emploi des imaginaires en Géométrie et dont les premières Leçons furent seules publiées.

Aucune des ressources nouvelles de la Géométrie supérieure ne lui fut étrangère; il en créa quelques-unes; il les mania toutes avec habileté et bonheur. Les résultats sont trop nombreux pour que je puisse songer à les analyser ou même à les énumérer tous. Sur cent quarante Mémoires

qu'il nous a laissés, plus de la moitié sont des travaux de Géométrie et marquent la place qu'a tenue Laguerre dans ce mouvement dont j'ai parlé plus haut et d'où est sortie la Géométrie moderne.

Il s'occupa d'abord de représenter d'une façon concrète les points imaginaires du plan et de l'espace; c'est ainsi, en particulier, qu'il fut amené à comprendre le premier le rôle important que joue l'aire du triangle sphérique dans la Géométrie de la sphère, et à étendre la théorie des foyers à toutes les courbes algébriques planes et sphériques.

L'étude des courbes et des surfaces algébriques se rattache directement à la théorie des formes homogènes et de leurs invariants; tout théorème sur ces formes est susceptible, en effet, d'autant d'interprétations géométriques qu'on peut imaginer de systèmes nouveaux de coordonnées. Laguerre a créé deux de ces systèmes : le premier est applicable aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre; le deuxième est ce qu'il a appelé l'*équation mixte* et met en évidence les tangentes qu'on peut mener à la courbe d'un point extérieur. Sa connaissance approfondie de la théorie des formes, alors naissante, lui permit de tirer de ces deux inventions tout le parti possible. Parmi ces résultats, je citerai seulement l'étude qu'il fit d'une surface du troisième ordre, réciproque de celle de Steiner.

Les courbes et les surfaces anallagmatiques attiraient à cette époque l'attention des géomètres les plus éminents; plusieurs de leurs propriétés les plus importantes ont été découvertes par Laguerre. Il étudiait en même temps toutes les courbes du quatrième ordre, et en particulier l'hypocycloïde à trois rebroussements, la cardioïde, la lemniscate, les cassiniennes planes et sphériques, les biquadratiques gauches; ses résultats élégants, qu'il établissait toujours par une démonstration simple et ingénieuse, font nettement ressortir les rapports qui lient entre elles ces questions différentes.

A côté de la Géométrie algébrique se développe la Géométrie infinitésimale, à laquelle se rattache l'étude de la courbure des lignes et des surfaces. Cette branche de la Science doit aussi beaucoup à Laguerre. Il y a appliqué tantôt les ressources du Calcul différentiel, tantôt celles des méthodes algébriques qu'il avait créées. Je citerai seulement ses recherches sur les lignes géodésiques et sur la courbure des surfaces anallagmatiques.

Le célèbre théorème de Poncelet est une interprétation géométrique lumineuse de l'addition des arguments elliptiques. Laguerre l'éclaircit encore, en approfondit les cas particuliers, le rattache aux découvertes de Jacobi, enfin le généralise et l'étend aux fonctions hyperelliptiques. Le théorème d'addition de ces fonctions, si compliqué sous sa forme algébrique, est remarquablement simple et élégant sous son nouveau vêtement géométrique.

Je ne puis que signaler en passant une ingénieuse extension du théorème de Joachimstahl aux surfaces du second ordre, et j'ai hâte d'arriver à un Mémoire trop peu connu et dont la portée philosophique est très grande. Ce Mémoire, qui a pour titre : « Sur les systèmes linéaires », a été publié en 1867 dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

Les substitutions linéaires ont acquis dans l'Analyse une telle importance qu'il nous semble aujourd'hui difficile de traiter une seule question sans qu'elles s'y introduisent.

Laguerre devinait déjà, sans doute, l'avenir réservé à cette théorie et il en développait en quelques pages tous les points essentiels.

Mais il ne se bornait pas là. Depuis le commencement du siècle, de grands efforts ont été faits pour généraliser le concept de grandeur; des quantités réelles, on s'est élevé aux quantités imaginaires, aux nombres complexes, aux idéaux, aux quaternions, aux imaginaires de Gallois. Le domaine de l'Analyse s'agrandissait ainsi sans cesse et de tous côtés; Laguerre s'élève à un point de vue d'où l'on peut embrasser d'un coup d'œil tous ces horizons. Toutes ces notions nouvelles, et en particulier les quaternions, sont ramenées aux substitutions linéaires. Pour faire comprendre la portée de cette vue ingénieuse, qu'il me suffise de rappeler les beaux travaux de M. Sylvester sur ce sujet.

Laguerre applique ces principes à la théorie des formes quadratiques et à celle des fonctions abéliennes, et il retrouve et complète sur divers points les résultats de M. Hermite. Sans doute, il n'y a dans tout cela qu'une notation nouvelle; mais qu'on ne s'y trompe pas : dans les Sciences mathématiques, une bonne notation a la même importance philosophique qu'une bonne classification dans les Sciences naturelles. Le Mémoire que je cite en est d'ailleurs la meilleure preuve. Laguerre touche à toutes les branches de l'Analyse et force, pour ainsi dire, une multitude de faits sans aucun lien apparent à se grouper suivant leurs affinités naturelles.

Depuis 1874, Laguerre faisait partie du Jury d'admission à l'École Polytechnique. Ces délicates fonctions ne pouvaient être confiées à un examinateur plus compétent et plus scrupuleux. Ces juges si redoutés sont jugés à leur tour, et quelquefois sévèrement, par les candidats malheureux ou par leurs professeurs. Jamais un condamné n'a protesté contre un arrêt de Laguerre. Il savait mieux que personne distinguer le vrai savoir, quelquefois moins brillant, de cette érudition superficielle due à une préparation habile. Aussi quelle souffrance pour lui quand un candidat, dont il avait dès l'abord deviné le mérite, se troublait dans la suite de l'examen et restait au-dessous de lui-même.

C'est à ce moment de sa vie que j'ai commencé à le connaître et que j'ai pu apprécier, non seulement son rare talent de géomètre, mais sa conscience, sa droiture et sa grande élévation morale. Je me rappellerai toujours avec reconnaissance la complaisance avec laquelle il mettait au service des débutants toutes les ressources d'une érudition vaste et sûre.

Ses nouvelles fonctions ne détournèrent pas Laguerre de ses recherches géométriques; c'est à cette époque qu'il créa la Géométrie de direction. Il est peu d'exemples qui fassent mieux voir combien l'idée la plus simple peut devenir féconde quand un esprit ingénieux et profond s'en empare. On peut regarder une droite ou un cercle comme la trajectoire d'un point mobile; mais ce point peut parcourir sa trajectoire dans deux sens opposés : c'est ce qui conduit à considérer une droite comme formée de deux semi-droites et un cercle comme formé de deux cycles. De ce point de vue, les autres courbes se répartissent en deux classes : les courbes de direction qui sont susceptibles de se décomposer analytiquement, comme la droite, en deux trajectoires parcourues en sens contraire, et celles pour lesquelles une semblable décomposition est impossible.

Le parti que Laguerre a su tirer de cette distinction montre qu'elle n'est nullement arbitraire. Elle l'a conduit en particulier à une transformation géométrique nouvelle qui promet de n'être pas moins utile que les transformations déjà connues.

Pour résoudre un problème nouveau, nous cherchons toujours à le simplifier par une série de transformations; mais cette simplification a un terme, car il y a dans tout problème quelque chose d'essentiel, pour ainsi dire, que toute transformation est impuissante à modifier. De là l'importance de la notion générale d'invariant que l'on doit rencontrer dans toute question de Mathématiques; elle devait s'introduire nécessairement dans la théorie des équations différentielles linéaires et fournir le moyen d'amener ces équations, par des opérations convenables, au plus haut degré possible de simplicité.

Cette idée est due aussi à Laguerre, et M. Halphen a montré combien elle était féconde en développant à ce point de vue nouveau sa théorie des invariants différentiels.

J'arrive à la partie la plus remarquable de l'œuvre de Laguerre, je veux parler de ses travaux sur les équations algébriques. Le théorème de Sturm permettait déjà une discussion complète; la méthode de Newton donnait une approximation rapide et indéfinie. La question semblait donc épuisée. Mais ce n'était pas la première fois que Laguerre, abordant un champ où les esprits superficiels ne croyaient plus avoir rien à glaner, en rapportait une moisson nouvelle.

La méthode de Sturm, il faut bien le reconnaître, a été plus admirée qu'appliquée. Pour obtenir le nombre des racines réelles d'une équation, on préfère généralement employer des moyens détournés propres à chaque cas particulier; on ne pouvait donc trouver de nouveau qu'en dehors du cas général.

La démonstration classique de la règle des signes de Descartes est d'une grande simplicité; Laguerre en a trouvé une plus simple encore. Ce n'eût été là qu'un avantage secondaire, mais la démonstration nouvelle s'applique non seulement aux polynômes entiers, mais encore aux séries infinies. Ainsi transformé, le théorème de Descartes devient un instrument d'une flexibilité merveilleuse; manié par Laguerre, il le conduit à des règles élégantes, bien plus simples que celles de Sturm et s'appliquant à des classes très étendues d'équations. Une d'elles, qui, à vrai dire, est aussi compliquée que celle de Sturm, a le même degré de généralité. Laguerre ne s'y arrête pas d'ailleurs, attiré plutôt vers les cas particuliers simples par son instinct scientifique.

La méthode de Newton consiste à remplacer l'équation à résoudre par une équation du premier degré qui en diffère très peu; Laguerre la remplace par une équation du deuxième degré qui en diffère moins encore. L'approximation est plus rapide; de plus, la méthode n'est jamais en défaut, au moins quand toutes les racines sont réelles. Le procédé nouveau est surtout avantageux quand le premier membre de l'équation est un de ces polynômes qui satisfont à une équation différentielle linéaire et dont le rôle analytique est si important. Je ne puis non plus passer sous silence une méthode ingénieuse pour séparer et calculer les racines imaginaires, mais dont Laguerre n'a pas eu le temps de tirer toutes les conséquences.

Quelles sont, parmi ces propriétés, celles qui s'étendent aux

équations transcendantes? Laguerre s'en préoccupe et est ainsi amené à approfondir la classification en genres des transcendantes entières; personne ne s'est avancé aussi loin que lui dans cette théorie, l'une des plus difficiles de l'Analyse.

L'étude des fractions continues algébriques nous permettra sans doute un jour de représenter les fonctions par des développements beaucoup plus convergents que les séries de puissances; mais peu de géomètres ont osé s'aventurer dans ce domaine inconnu qui nous réserve bien des surprises; Laguerre y fut conduit par ses recherches sur les polynômes qui satisfont à une équation différentielle linéaire. De tous les résultats qu'il obtint, je n'en veux citer qu'un, parce que c'est le plus surprenant et le plus suggestif. D'une série divergente, on peut déduire une fraction continue convergente : c'est là un nouveau mode d'emploi légitime des séries divergentes qui est sans doute destiné à un grand avenir.

Tel est ce vaste ensemble de travaux algébriques et analytiques où Laguerre a su, chose rare, s'élever aux aperçus généraux sans jamais perdre de vue les applications particulières et même numériques.

Je m'arrête dans cette longue énumération de découvertes; je n'ai pu être court, et je n'ai pas même l'excuse d'avoir été complet, puisque je n'ai signalé ni les applications de la méthode de Monge ni celles du principe du dernier multiplicateur; mais la prodigieuse fécondité de Laguerre rendait ma tâche difficile.

S'il était vrai qu'on ne pût rencontrer la gloire sans la chercher, Laguerre serait resté toujours ignoré; mais, heureusement, ses beaux travaux lui avaient attiré l'estime et bientôt l'admiration des juges les plus compétents, et il ne devait pas attendre en vain qu'on lui rendît justice. L'Institut lui ouvrit ses portes le 11 mai 1883; peu de temps après, M. Bertrand lui confiait la suppléance de la chaire de Physique mathématique au Collège de France.

Il est triste de penser que Laguerre ne put jouir que pendant peu de temps de cette double et légitime récompense. Il eut encore le temps, cependant, dans les quelques Leçons qu'il fit au Collège de France, d'exposer sous un jour tout nouveau cette belle théorie de l'attraction des ellipsoïdes, qu'il avait complétée par ses travaux personnels. Il siégea à peine à l'Académie des Sciences. Les examens d'entrée à l'École Polytechnique l'en éloignèrent d'abord, puis la maladie l'obligea à quitter toutes ses occupations.

Sa santé, qui avait toujours été délicate, usée par un travail incessant et opiniâtre, était irrémédiablement perdue. Malgré les soins pieux dont Laguerre était entouré, le mal fit pendant six mois de continuels progrès. Il mourut, le 14 août 1886, dans sa ville natale, à Bar-le-Duc.

Il sera regretté non seulement de ses amis, mais de tous les hommes qui s'intéressent à la Science et qui savent combien de secrets il a emportés dans la tombe.

H. POINCARÉ.

TABLE DES MATIÈRES.